Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования «Белорусский государственный университет   
информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра информатики

Дисциплина «Прикладные задачи математического анализа»

|  |  |
| --- | --- |
|  | «К защите допустить» |
|  | Руководитель курсового проекта доцент кафедры информатики  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_В.Я. Анисимов |
|  | \_\_\_.\_\_\_\_.2024 |

**ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА**

к курсовому проекту

на тему:

**«РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ЭКСТРЕМУМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СКА MAPLE»**

БГУИР КП 6-05 0612 02 015 ПЗ

|  |  |
| --- | --- |
|  | Выполнила студентка группы 353504  ЛЕБЕДЕВА Милана Валерьевна \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  (подпись студента) |
|  | Курсовой проект представлен на проверку \_\_\_.\_\_\_\_.2024  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  (подпись студента) |

Минск 2024

**СОДЕРЖАНИЕ**

[Введение 5](#_Toc121715378)

[1 Теоретическая часть 7](#_Toc121715379)

[1.1 Понятие экстремума функции 7](#_Toc121715380)

[1.2 Условия существования экстремумов 10](#_Toc121715381)

[1.3 Методы аналитического поиска экстремумов 11](#_Toc121715381)

[2 Система компьютерной алгебры Maple 14](#_Toc121715382)

[2.1 Обзор системы Maple 14](#_Toc121715383)

[2.2 Основные возможности Maple для решения задач на экстремум 15](#_Toc121715384)

[3 Методы решения задач на экстремумы в Maple 17](#_Toc121715390)

[3.1 Применение команд maximize и minimize 17](#_Toc121715391)

[3.2 Применение команды extrema 17](#_Toc121715392)

[3.3 Использование производных для нахождения экстремумов 19](#_Toc121715393)

[3.4 Графический метод 19](#_Toc121715393)

[3.5 Метод Лагранжа 19](#_Toc121715393)

[4 Практическая часть 20](#_Toc121715394)

[4.1 Примеры решения задач в Maple 20](#_Toc121715391)

[4.2 Анализ результатов 25](#_Toc121715391)

[Заключение 30](#_Toc121715401)

[Список использованных источников 31](#_Toc121715402)

# ВВЕДЕНИЕ

**Краткое описание проблемы.**

В современных условиях научных исследований и инженерной практики задача нахождения экстремумов функций приобретает особую актуальность. Экстремумы играют ключевую роль в оптимизации процессов, моделировании и принятии решений в различных областях — от экономики до физики. Однако традиционные аналитические методы могут оказаться недостаточными для решения сложных задач. В таких случаях на помощь приходят компьютерные системы, такие как Maple, которые предоставляют мощные инструменты для автоматизации расчетов и визуализации результатов.

**Цель и перечни задач:**

Целью данной работы является исследование методов нахождения экстремумов функций с использованием системы компьютерной алгебры Maple. Для достижения этой цели необходимо решить следующие задачи:

1 Изучить теоретические основы экстремумов функций, включая понятия, условия существования и методы их поиска.

2 Провести обзор системы Maple, выделив ее основные возможности для решения задач на экстремум.

3 Рассмотреть методы, доступные в Maple для нахождения экстремумов, включая использование производных, команд extrema, optimize и minimize.

4 Сделать практическую часть, включающую примеры решения задач и анализ полученных результатов.

**Краткое содержание глав.**

В первой главе работы будет рассмотрено понятие экстремума функции, а также условия его существования и основные методы поиска. Вторая глава будет посвящена системе Maple: ее возможностям и особенностям, которые делают ее подходящей для решения задач на экстремум. Третья глава представит конкретные методы, доступные в Maple для нахождения экстремумов, с акцентом на практическое применение производных и специализированных команд. В четвертой главе будут приведены примеры решения конкретных задач в Maple, а также проведен анализ полученных результатов, что позволит оценить эффективность и точность используемых методов.

# 1 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

## 1.1 Понятие экстремума функции

Экстремумы функции играют важную роль в математическом анализе и его приложениях. Экстремумом функции называется её максимальное или минимальное значение на заданном множестве.

**Определение 1.** Точка называется точкой локального максимума функции , если найдется такой интервал с центром в этой точке, что для всех из этого интервала выполняется неравенство .

**Определение 2.** Точка называется точкой локального минимума функции , если найдется такой интервал с центром в этой точке, что для всех из этого интервала выполняется неравенство .

**Определение 3.** Точка называется точкой строгого локального максимума функции , если найдется такой интервал с центром в этой точке, что для всех из этого интервала выполняется неравенство .

**Определение 4.** Точка называется точкой строгого локального минимума функции , если найдется такой интервал с центром в этой точке, что для всех из этого интервала выполняется неравенство .

**Определение 5.** Точки локального минимума и локального максимума функции называются её точками экстремума, а значения функции в этих точках — экстремумами этой функции.

**Определение 6.** Наибольшее или наименьшее значение функции на промежутке называется глобальным экстремумом.

Замечание. Следует различать понятия точек экстремума и экстремумов функции. На графике функции точки экстремума — это значения на оси  а экстремумы функции — это значения на оси (см. рис. 1.1) [1].

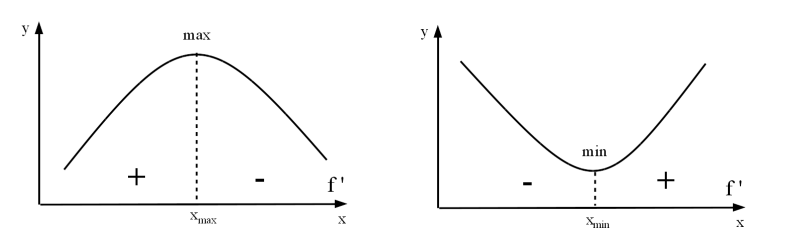


Рисунок 1.1 – Точки максимума и минимума

## 1.2 Условия существования экстремумов

Условия существования экстремумов функции необходимы для нахождения и классификации критических точек.

*Теорема (необходимое условие экстремума)*. Если точка является точкой экстремума функции , то в этой точке равен нулю или не существует.

Если , то в точке функция имеет гладкий экстремум (см. рис 1.2).

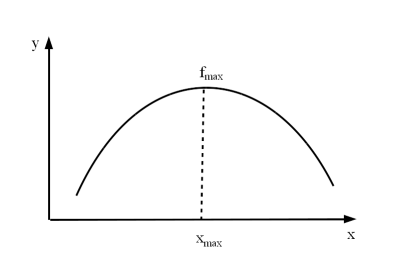


Рисунок 1.2 – Гладкий экстремум

Если не существует (т.е. ), то в точке функция имеет острый экстремум (см. рис 1.3).

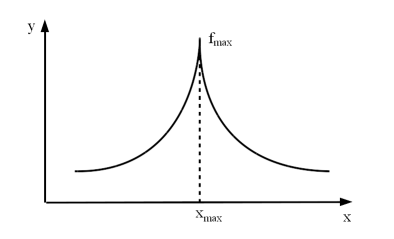


Рисунок 1.3 – Острый экстремум

*Теорема (достаточное условие экстремума по первой производной)*. Пусть функция дифференцируема в некоторой окрестности точки , кроме, быть может, самой точки , в которой она является непрерывной. Тогда если меняет знак при переходе через точку , то точка является точкой экстремума.

*Теорема (достаточное условие экстремума по второй производной)*. Пусть , , . Если , то – точка локального максимума. Если , то – точка локального минимума.

## 1.3 Методы аналитического поиска экстремумов

Поиск экстремумов функций — это одна из ключевых задач в математическом анализе. Экстремумы, или максимумы и минимумы, играют важную роль в оптимизации, экономике, инженерии и многих других дисциплинах. Для решения задач оптимизации необходимо точно определить, где функция достигает своих наивысших или наименьших значений.

Существуют методы аналитического поиска экстремумов, каждый из которых имеет свои особенности, преимущества и недостатки. К числу основных методов относятся использование производных, графический анализ, метод Лагранжа для нахождения условных экстремумов и численные методы, которые применяются в более сложных случаях.

– Поиск с помощью первой производной. Этот метод основан на нахождении критических точек функции, где её производная равна нулю или не существует.

Шаги:

1 Найти первую производную ;

2 Составить уравнение и решить его для нахождения критических точек;

3 Определить, существуют ли точки, где производная не определена;

4 Определить точки максимума и минимума.

– Графический метод. Этот метод позволяет найти экстремумы, визуализируя функцию.

Шаги:

1 Построить график функции ;

2 Определите точки, где график достигает пиков (максимумы) и впадин (минимумы);

3 Так как графический метод не даст наиболее точного значения экстремума, а скорее, поможет определить интервал, в пределах которого находится экстремум, необходимо подтвердите визуальные наблюдения, используя производные для нахождения точных значений экстремумов.

– Метод Лагранжа. Этот метод используется для нахождения условных экстремумов функции.

Шаги:

1 Составить функцию Лагранжа в виде линейной комбинации функции и функции , взятых с коэффициентами, называемыми множителями Лагранжа – : , где ;

2 Составить систему из уравнений, приравняв к нулю частные производные функции Лагранжа по и ;

3 Если полученная система имеет решение относительно параметров и , тогда точка может быть условным экстремумом, то есть решением исходной задачи.

Каждый из этих методов имеет свои преимущества и недостатки, и выбор подходящего метода зависит от характера функции и условий задачи. Метод производных предоставляет точные результаты, графический метод позволяет быстро визуализировать данные, метод Лагранжа используется для нахождения условных экстремумов [2].

# 2 СИСТЕМА КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ MAPLE

## 2.1 Обзор системы Maple

Maple — это мощный программный пакет и система компьютерной алгебры, представляющая собой символьную и числовую вычислительную среду, разработанную компанией Waterloo Maple Inc с 1984 года. Он охватывает несколько областей технических вычислений, таких как символьная математика, численный анализ, обработка данных, визуализация и другие.

К основным функциональным возможностям СКА Maple относятся:

1 Символьные вычисления, которые позволяют пользователям выполнять алгебраические преобразования, находить производные, интегралы и решать уравнения в аналитической форме;

2 Численные методы, которые включают средства для численного решения дифференциальных уравнений и нахождения интегралов, что делает ее универсальным инструментом для различных математических задач;

3 Графические возможности, позволяющие создавать наглядные визуализации математических функций и данных, помогает интерпретировать результаты вычислений.

4 Язык программирования, напоминающий PascalABC, который допускает переменные лексической области видимости. Этот язык позволяет разрабатывать собственные функции и алгоритмы, расширяя функциональность Maple. Также имеются интерфейсы к другим языкам (C, C#, Fortran, Java, MATLAB и Visual Basic), а также к Microsoft Excel.

Maple имеет архитектуру, основанную на небольшом ядре, написанном на языке C, которое обеспечивает базовые функции языка Maple. Основная функциональность реализуется через библиотеки, поступающие из различных источников, большинство из которых написаны на самом языке Maple и имеют открытый исходный код. Для численных вычислений используются специализированные библиотеки, такие как NAG, ATLAS и GMP. Интерфейсы, включая стандартный интерфейс и интерфейс калькулятора, реализованы на языке Java [3].

## 2.2 Основные возможности Maple для решения задач на экстремум

К основным возможностям Maple для решения задач на экстремумы относятся такие встроенные функции, как maximize(), minimize() и extrema(). Функции maximize() и minimize() используются для поиска максимума и минимума функции как одной, так и нескольких переменных. Функция extrema позволяет найти экстремумы при ограничениях или без них. Важно отметить то, что minimize() и maximize() определяют минимум и максимум функции как и , в то время как extrema() находит локальные экстремумы.

Такие методы поиска экстремумов, как использование производных, графический метод и метод Лагранжа, требуют отдельного описания их логики в СКА Maple, однако в они могут быть реализованы с помощью стандартных функций.

С помощью команды diff() можно вычислить первую и вторую производные функции. Используя команду solve() можно решить уравнение, составленное с производной, что позволяет определить критические точки. Для построения графика функции используется стандартная функция plot(). Для написания метода Лагранжа используются встроенные функции для нахождения экстремумов, а также другие стандартные команды [4].

# 3 МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ЭКСТРЕМУМЫ В MAPLE

## 3.1 Применение команд maximize и minimize

Существует два типа команд maximize(): maximize(obj, constr, bd, opts)

maximize(opfobj, ineqcon, eqcon, opfbd, opts) [5].

Параметры функций имеют определенные значения: obj – заданная функция, которая должна быть алгебраическим выражением, constr – ограничения, bd – границы для одной или нескольких переменных, opts – опции для команды, opfobj – заданная функция, ineqcon – ограничения неравенства, eqcon – ограничения равенства, opfbd – границы для всех переменных.

По умолчанию, если не указан диапазон изменения переменной, рассматривается область определения функции, заданной с помощью выражения obj. Для получения точки минимума или максимума на отрезке добавляется параметр команды location. С помощью параметров можно задавать дополнительные данные для поиска, так, например, ограничить область поиска или, используя параметр location, включить расширенный вывод результатов – выводить не только значение минимума (или максимума), но и значения переменных в этой точке.

Maple возвращает решение в виде списка, содержащего итоговое минимальное (или максимальное) значение и точку (экстремум). Если указана опция output = solutionmodule, то возвращается модуль. Рассмотрим поиск максимума функции на примере функции двух переменных.

FindMaximum := proc(f, x1, x2, y1, y2)

local Fmax, X, Y, Fun, Pmax, txt;

Fmax := maximize(f);

print(Maximum of the function);

print(Fmax);

maximize(f, location);

X := rhs(op(1, op(1, op(1, %[2]))));

print(x coordinate of the maximum);

print(x = X);

Y:=rhs(op(2,op(1, op(1, `%%`[2]))));

print(y coordinate of the maximum);

print(y = Y);

Fun := plot3d(f(x, y), x = x1 .. x2, y = y1 .. y2, axes = boxed);

Pmax := plottools[sphere]([3/2, -3/2, 3/2], 1, color = blue);

txt := plots[textplot3d]([3/2, -3/2, 9/2, "Maximum of the function"], align = right, color = black);

print(The graph of the function and the found extremum); ` print(plots[display]([Fun, Pmax, txt]));

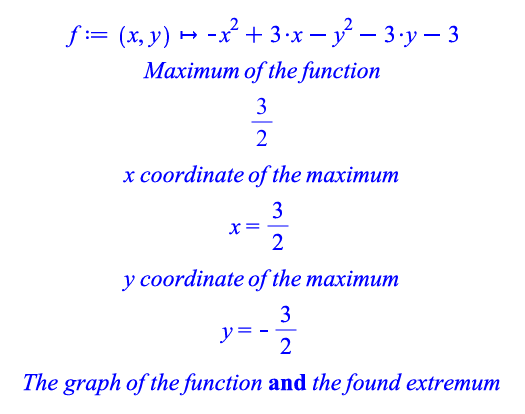
end proc;

Процедура FindMaximum() принимает функцию двух переменных f и пределы x1,x2 и y1,y2 построения графика в качестве аргументов. Внутри процедуры находится максимум функции f с помощью команды maximize(). Повторно вызывается maximize(f, location), чтобы получить координаты максимума. Координаты максимума (X и Y) извлекаются из результата команды maximize(). Строится 3D-график функции двух переменных с использованием plot3d(). На графике отмечается точка максимума с помощью plottools[sphere]. Ниже представлено использование процедуры.

f := (x, y) -> -x^2 + 3\*x - y^2 - 3\*y - 3;

FindMaximum(f(x, y), -25, 25, -25, 25);

Происходит определение функции двух переменных . Далее осуществляется вызов процедуры с аргументами: f(x,y), -25, 25, -25, 25. На рисунке 3.1 представлен результат выполнения процедуры.



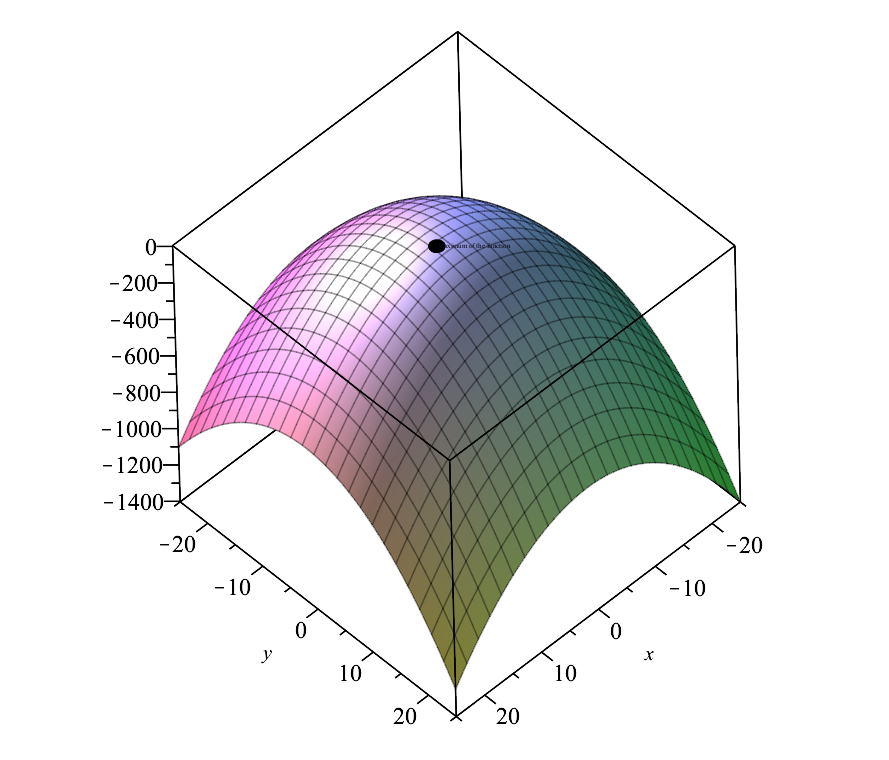


Рисунок 3.1 – Результат выполнения процедуры FindMaximum()

Команды minimize() имеют те же два типа: minimize (obj, constr, bd, opts), minimize(opfobj, ineqcon, eqcon, opfbd, opts).

## 3.2 Применение команды extrema

Экстремальные значения функции нескольких переменных можно определить командой extrema(). Существует три типа команды extrema(): extrema(expr, contraints), extrema(expr, contraints, vars), extrema(expr, contraints, vars, ‘s’) [6].

Значения параметров функций таковы: expr – выражение, определяющее функцию переменных , экстремумы которого необходимо найти, contraints – множество ограничений на переменные при нахождении условного экстремума, vars – переменная или набор переменных, s – переменная для хранения результата.

При отсутствии ограничений вместо них записывается пустое множество {}. Найденные координаты точек экстремума присваиваются переменной s. Рассмотрим поиск максимума функции на примере функции двух переменных.

FindExtremum := proc(f)

local p, Z, spheres;

minimize(f);

maximize(f);

extrema(f(x, y), {}, {x, y}, 's');

print(Сoordinates of the extremum points);

print(s);

Z := plot3d(f, axes = boxed);

spheres := [];

for p in s do spheres := [op(spheres), plottools[sphere]([rhs(p[1]), rhs(p[2]), f(rhs(p[1]), rhs(p[2]))], 0.25, color = red)];

end do;

print(The graph of the function and the extremums);

plots[display]([Z, op(spheres)]);

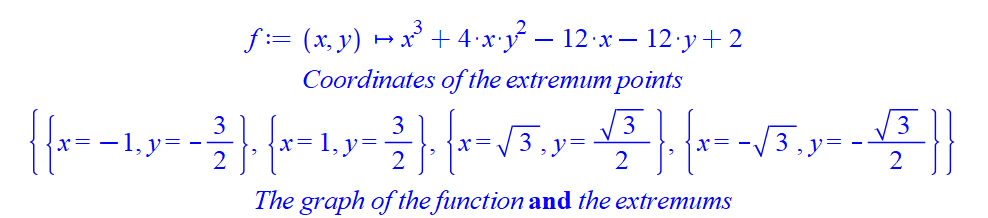
end proc:

Процедура FindExtremum() принимает функцию двух переменных f в качестве аргумента. Внутри процедуры находятся максимум и минимум функции f с помощью команд maximize() и minimize(). Вызывается extrema(f(x, y), {}, {x, y}, 's') для нахождения координат всех экстремумов функции f и сохраняет их в переменной s. Строится 3D-график функции двух переменных с использованием plot3d(). На графике отмечаются точки максимума и минимума. Ниже представлено использование процедуры.

f := (x, y) -> x^3 + 4\*x\*y^2 - 12\*x - 12\*y + 2;

FindExtremum(f);

Происходит определение функции двух переменных . Далее осуществляется вызов процедуры с аргументом f. На рисунке 3.2 представлен результат выполнения процедуры.



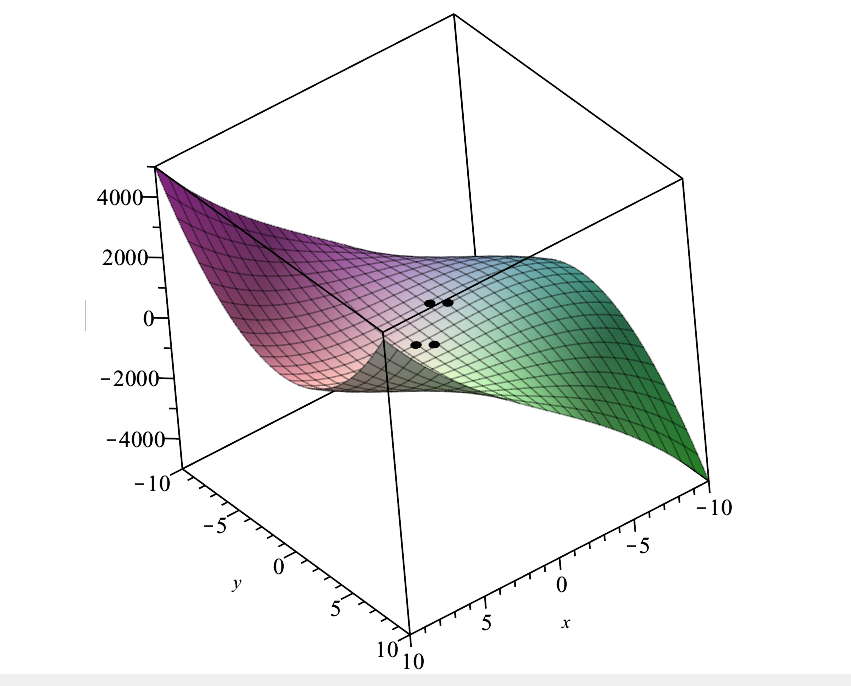


Рисунок 3.2 – Результат выполнения процедуры FindExtremum()

## 3.3 Использование производных для нахождения экстремумов

Одним из наиболее распространённых методов для нахождения экстремумов является использование производных. Производная функции в определённой точке отражает скорость изменения функции в окрестности этой точки. Когда производная равна нулю, это может указывать на наличие экстремума или точки перегиба. Этот подход позволяет эффективно определять, где функция достигает своих наибольших или наименьших значений, и помогает глубже понять её поведение. Рассмотрим поиск локальных экстремумов функции на примере функции одной переменной [7].

FindExtremumDiff := proc(f, x1, x2)

local F, criticalPoints, x0, Value, p1;

F := diff(f, x);

criticalPoints := solve(F = 0, x);

for x0 in criticalPoints do

Value := eval(f(x), x = x0);

if 0 < eval(F, x = x0 - 0.01) and eval(F, x = x0 + 0.01) < 0 then

print(Local\*maximum);

print(x0);

print(with value of function);

print(Value);

elif eval(F, x = x0 - 0.01) < 0 and 0 < eval(F, x = x0 + 0.01) then

print(Local minimum);

print(x0);

print(with value of function);

print(Value);

else

print(Not an axtremum);

print(x0);

end if;

end do;

print(The graph of the function);

p1 := plot(f(x), x = -1 .. 4, color = blue);

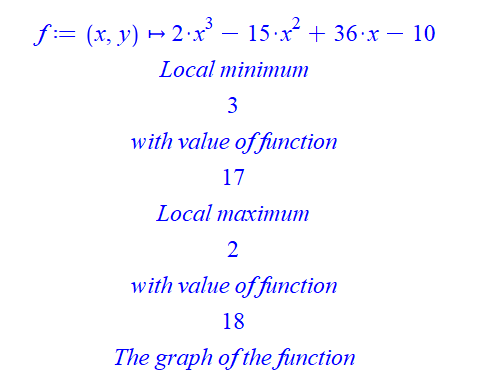
end proc:

Процедура FindExtremumDiff() принимает функцию одной переменной f и пределы x1,x2 построения графика в качестве аргументов. Внутри процедуры вычисляется производная функции и находятся критические точки. Далее производится анализ точек на экстремумы и строится график исходной функции, по которому визуально можно проверить правильность нахождения максимумов и минимумов. Ниже представлено использование процедуры.

f := (x, y) -> 2\*x^3 - 15\*x^2 + 36\*x - 10;

FindExtremumDiff(f(x, y), -1, 4);

Происходит определение функции двух переменных . Далее осуществляется вызов процедуры с аргументами. На рисунке 3.3 представлен результат выполнения процедуры.



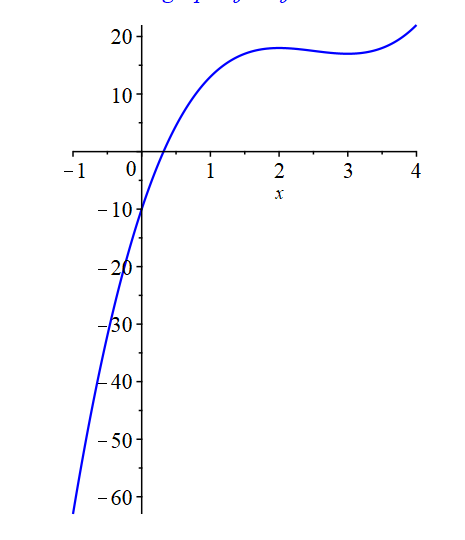


Рисунок 3.3 – Результат выполнения процедуры FindExtremumDiff()

## 3.4 Графический метод

Графический метод является одним из наглядных способов анализа функций и нахождения их экстремумов. Этот метод включает в себя построение графика функции, что позволяет визуально определить поведение функции на заданном интервале. На графике можно заметить точки, в которых функция принимает максимальные или минимальные значения, однако стоит помнить о том, что точные значения экстремумов определить по графику будет трудно. В данном случае рассматриваются несколько примеров построения графиков функций и производится анализ их экстремумов.

PlotFunction := proc(f, x1, x2)

local p;

p := plot(f(x), x = x1 .. x2, color = pink, title = "The graph of function", labels = ["x", "f(x)"], grid = true);

print(p);

end proc:

Процедура PlotFunction() принимает функцию одной переменной f и пределы x1,x2 построения графика в качестве аргументов. Внутри процедуры происходит построение графика функции, который можно использовать для дальнейшего анализа экстремумов. Ниже представлено использование процедуры для функции .

f := x -> 1 - ((x - 1)^2)^(1/3);

PlotFunction(f(x), -5, 5);

Результат выполнения процедуры представлен на рисунке 3.4.

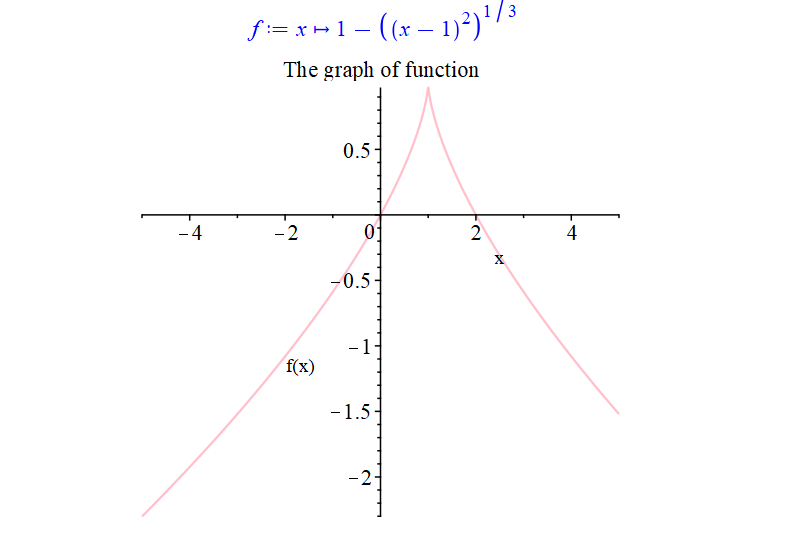


Рисунок 3.4 – Результат выполнения процедуры PlotFunction() для функции

На графике можно заметить точку, в которой происходит переход с возрастания функции на убывание, следовательно, это точка является точкой локального максимума. Результат выполнения процедуры PlotFunction() для функции .

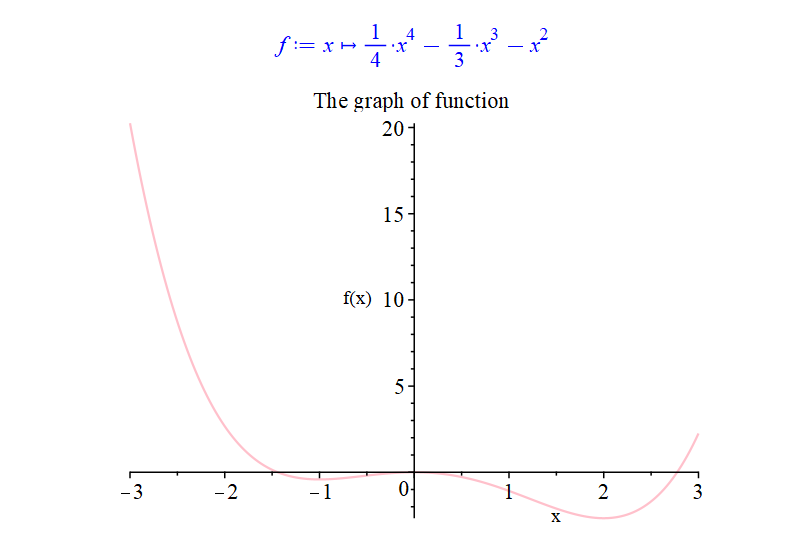


Рисунок 3.5 – Результат выполнения процедуры PlotFunction() для функции

На графике можно заметить точки, в которых происходит переход возрастания функции на убывание и наоборот, следовательно, эти точки будут являться точками локального максимума и минимума.

## 3.5 Метод Лагранжа

Рассмотрим задачу нахождения условного экстремума функции при наличии ограничений, заданных уравнением . Метод Лагранжа предполагает использование функции Лагранжа, которая определяется следующим образом: , где – множитель Лагранжа [8].

LagrangeMethod := proc(f, constraints, vars)

local m, L, lambda, eqns, sol, critical\_points, results, i, solution, phix, phiy, Fx, Fy, Fxx, Fyy, Fxy, N, det, is\_min, is\_max, var;

m := nops(constraints);

lambda := [seq(lambda[i], i = 1 .. m)];

L := f + add(lambda[i]\*constraints[i], i = 1 .. m);

eqns := [];

for var in vars do

eqns := [op(eqns), diff(L, var) = 0];

end do;

for i to m do

eqns := [op(eqns), constraints[i] = 0];

end do;

sol := solve(eqns, {op(lambda), op(vars)});

critical\_points := [sol];

results := [];

for solution in critical\_points do

phix := diff(constraints, x);

phiy := diff(constraints, y);

Fx := diff(L, x);

Fy := diff(L, y);

Fxx := diff(Fx, x);

Fxy := diff(Fx, y);

Fyy := diff(Fy, y);

N := Matrix(3, 3, [[0, phix[1], phiy[1]], [phix[1], Fxx, Fxy], [phiy[1], Fxy, Fyy]]);

N := eval(N, solution);

det := LinearAlgebra[Determinant](N);

if is(0 < evalf(det)) then

is\_min := false;

is\_max := true;

print(Maximum);

elif is(evalf(det) < 0) then

is\_min := true;

is\_max := false;

print(Minimum);

else is\_min := false;

is\_max := false;

print(Additional\*research);

end if;

results := [op(results), solution = [is\_min, is\_max]];

end do;

return results;

end proc:

Процедура LagrangeMethod() принимает три параметра: функция f, для которой находятся условные экстремумы, список уравнений связи constraints, которые нужно учесть при нахождении экстремума, список переменных vars.

Для корректного функционирования процедуры используются следующие команды Maple: nops() определяет количество уравнений связи в списке, solve() для решения систем уравнений, diff() вычисляет производные первого и второго порядков, eval() подставляет значения критических точек в матрицу, Determinant() вычисляет определитель матрицы. Ниже представлено использование процедуры для функции с уравнением связи .

f := x + 3\*y;

constraints := [x^2 + y^2 - 10];

vars := [x, y];

LagrangeMethod(f, constraints, vars)

Результат выполнения процедуры представлен на рисунке 3.6.

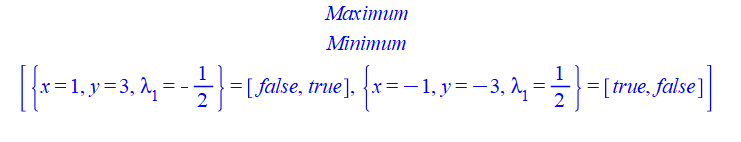


Рисунок 3.6 – Результат выполнения процедуры

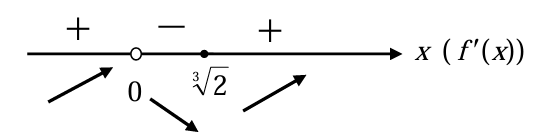
Подводя итоги, можно сказать, что использование Maple позволяет значительно упростить и ускорить процесс решения задач на экстремумы. Вместо того чтобы решать задачу вручную, СКА предоставляет мощные инструменты для нахождения максимальных и минимальных значений функций.

# 4 ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

## 4.1 Примеры решения задач в Maple

*Пример 1.* Найти точки экстремума функции .

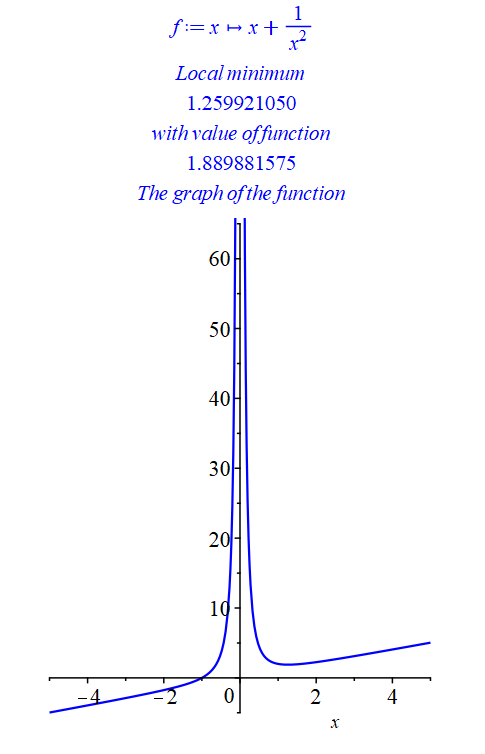
**Δ** Область определения функции . На каждом из бесконечных интервалов функция дифференцируема . при разбивает область определения данной функции на три интервала: , и . В каждом из интервалов производная сохраняет постоянный знак.

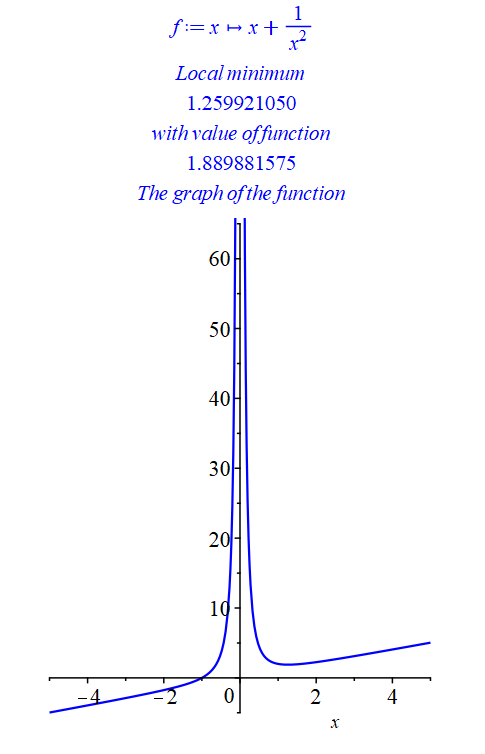


На интервалах и функция возрастает. На интервале функция убывает. Точка является точкой минимума.

Замечание. Поскольку непрерывна в точке , то эту точку можно присоединить и к промежутку возрастания, и к промежутку убывания функции. Окончательно функция возрастает на промежутках и и убывает на промежутке . В точке функция достигает минимума. **▲**

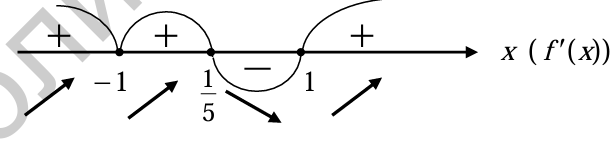
Сравним с результатами в Maple:



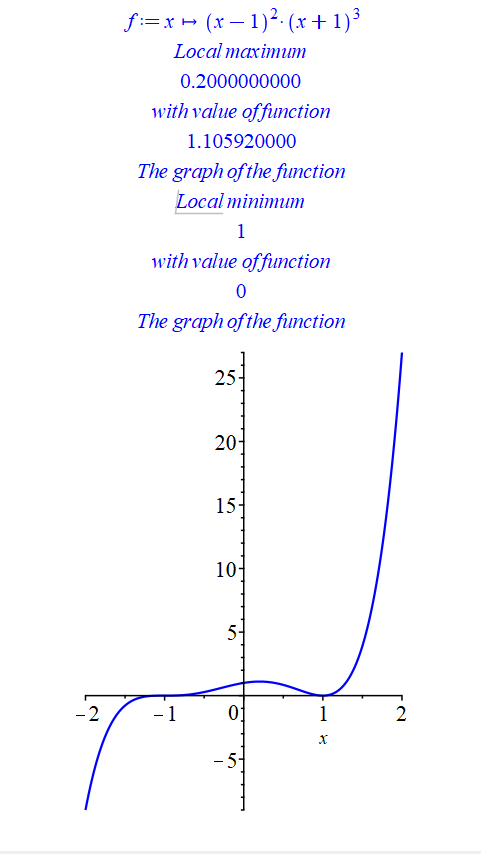


*Пример 2.* Исследовать функцию на экстремумы.

**Δ** Функция определена, непрерывна и дифференцируема на . . , , , . Определяем знаки производной на интервалах , , и .



на следующих промежутках: , , . Так как точки , , являются точками непрерывности функции, то функция возрастает на промежутках и . Функция убывает на промежутке . Точка является точкой максимума функции, точка является точкой локального минимума. **▲**



*Пример 3*. Найти условный экстремум функции при условии .

**Δ** Выразить одну переменную через другую из уравнения связи и подставить ее в функцию несколько затруднительно, поэтому будем использовать метод Лагранжа.

Обозначив , составим функцию Лагранжа:

;

, .

Запишем систему уравнений для определения стационарных точек функции Лагранжа:

Система имеет два решения: ; ; и ; ; . Выясним характер экстремума в каждой стационарной точке: и . Для этого вычислим определитель H в каждой из точек.

; ; ; ; .

В точке поулчим:

.

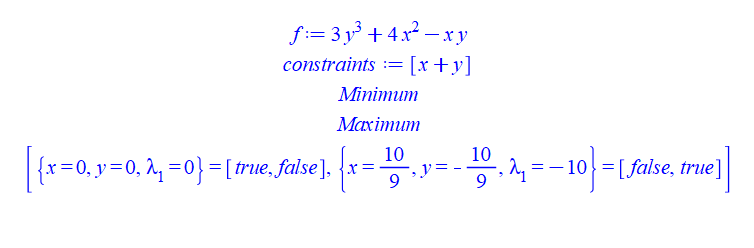
Следовательно, в точке функция имеет условный минимум, .

Аналогично, в точке найдем:

.

Так как , то в точке имеем условный максимум функции , а именно: . **▲**

Сравним с результатами в Maple:



*Пример 4*. Найдите точку локального максимума функции .

**Δ** . Найдем критические точки (то есть внутренние точки области определения функции, в которых её производная равна 0 или не существует):

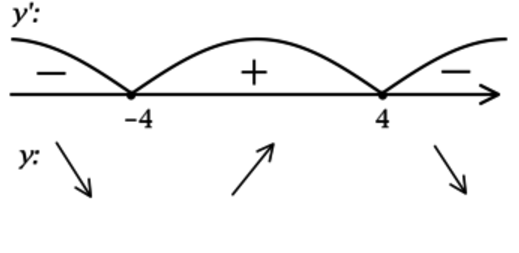
=>

=>

.

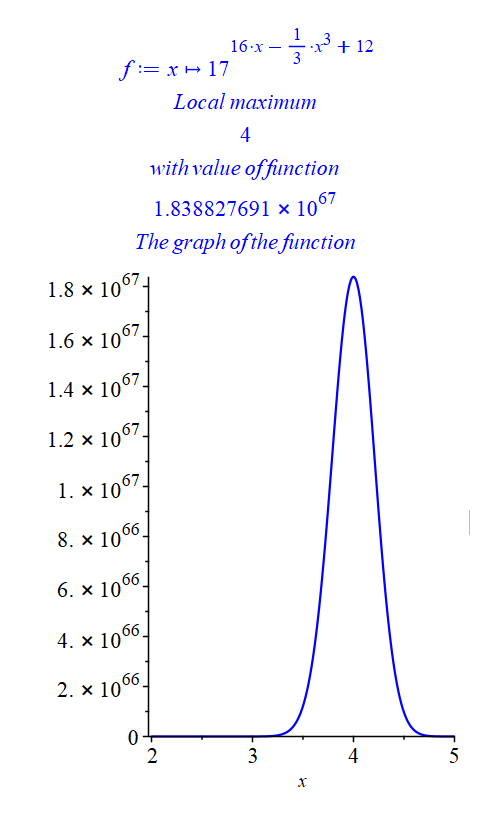
Так как при любом , откуда находим . Для того, чтобы найти точки локального максимума/минимума функции, нужно понять, как схематично выглядит её график.

Найдем промежутки знакопостоянства :

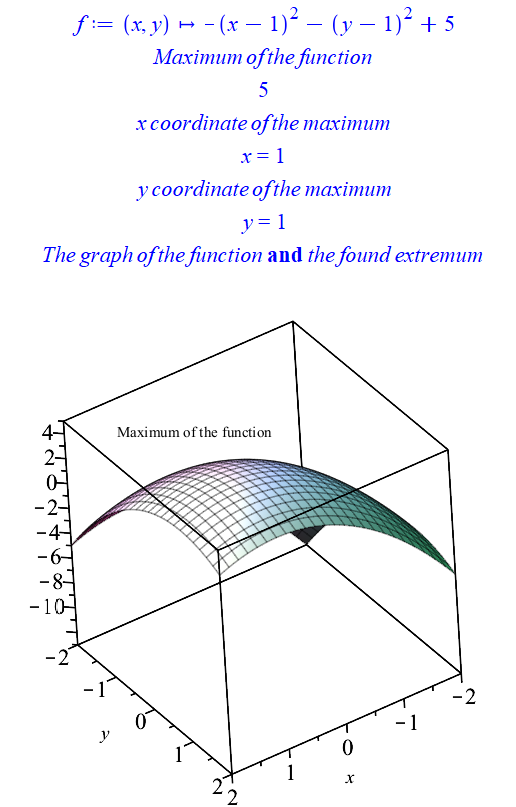
**

Таким образом, – точка локального максимума функции . **▲**

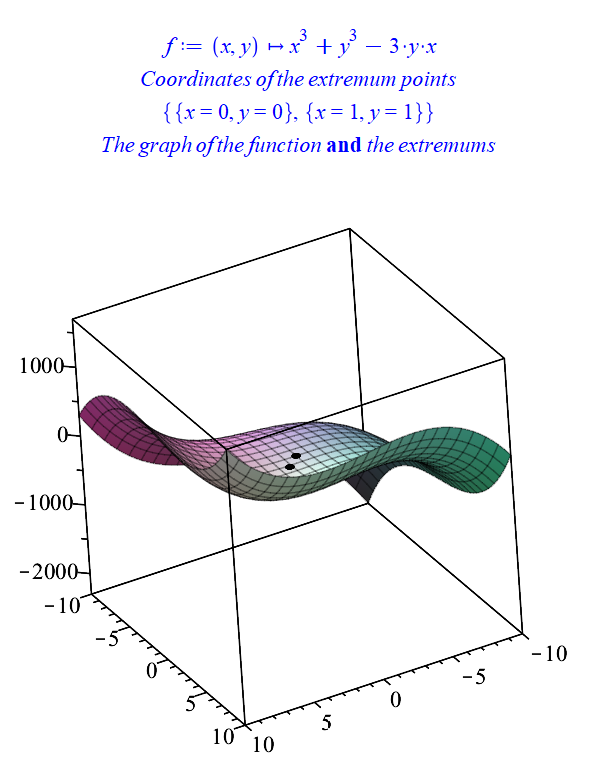
Сравним с результатами в Maple:



*Пример 5.* Найдите максимум функции двух переменных .



*Пример 6*. Исследуйте функцию . Определите координаты экстремумов.



*Пример 7.* Построить график функции с помощью производной первого порядка. Анализировать экстремумы функции.

**Δ** 1. Функция определена .

2. Данная функция – функция общего вида.

3. Найдем нули функции:

, , , .

Возьмем также две дополнительные точки, например:

, .

4. Находим производную: . Критическими точками функции являются точки .

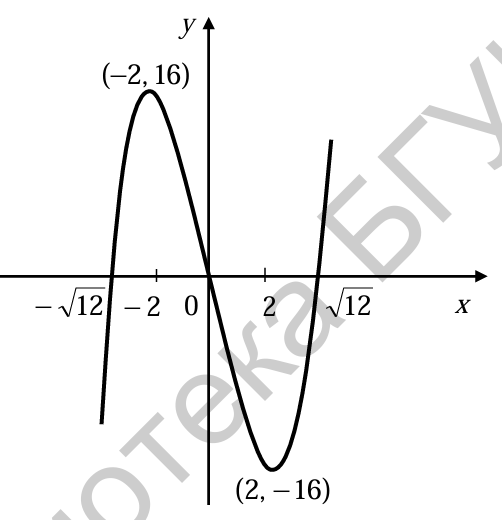
Найденные критические точки разбивают числовую прямую на три интервала. Находим знаки производной на этих промежутках:

убывает на промежутках: , возрастает на промежутке:

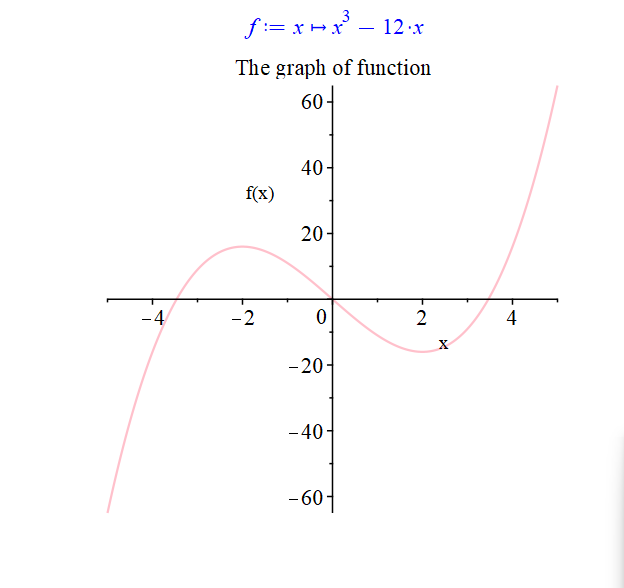
Результаты исследования заносим в таблицу.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  | , |
|  |  |  |  |  |  |
|  | ↓ |  | ↑ |  | ↓ |

По этим данным строим график искомой функции:

 **▲**

Сравним с результатами в Maple:



*Пример 8*. Исследовать на экстремум функцию в точке .

**Δ** Определим порядок первой отличной от нуля производной в точке :

*, ;*

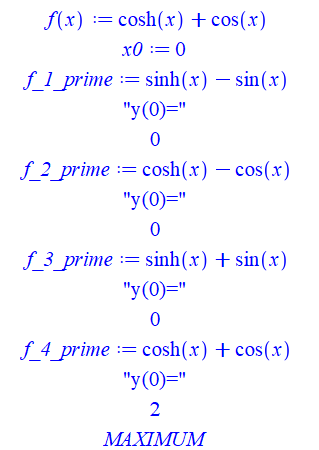
*, ;*

*, ;*

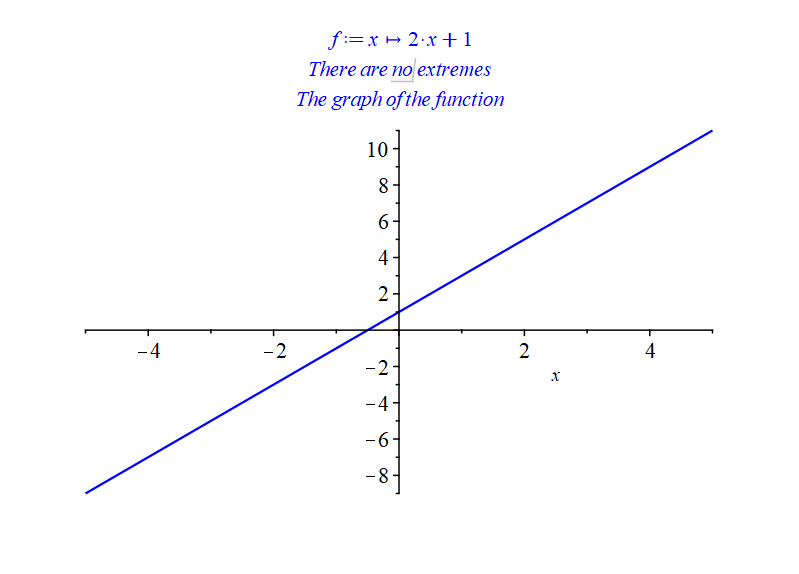
*, .*

Так как первой отличной от нуля производной в точке оказалась производная четного порядка, принимающая положительное значение, то в этой точке минимум: . **▲**

Сравним с результатами в Maple:



*Пример 9.* Найти экстремумы функции .



## 4.2 Анализ результатов

В предыдущей подглаве было описано решение нескольких различных примеров задач, связанных с нахождением экстремумов функций. Задачи варьировались от простых функций одной переменной до более сложных функций двух переменных. В процессе решения задач использовались как аналитические, так и численные методы, реализованные в системе компьютерной алгебры Maple.

В рамках работы были исследованы функции, для которых требовалось найти экстремумы, определить их координаты и исследовать характер этих экстремумов. Для визуализации результатов были построены графики функций с использованием производной первого порядка и команды plot. Графическое представление значительно упростило интерпретацию результатов и подтвердило наличие или отсутствие экстремумов в определенных точках. В нескольких задачах было необходимо исследовать функции на экстремум в конкретной точке. Некоторые задачи требовали нахождения условных экстремумов, что потребовало применения метода множителей Лагранжа для функций двух переменных. Это позволило установить экстремумы при заданных условиях.

Анализ результатов показал, что система Maple является мощным инструментом для решения задач на экстремумы. Использование производных, графиков и различных методов анализа позволило эффективно решать задачи и глубже понять свойства исследуемых функций.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В ходе выполнения курсовой работы была проведена глубокая работа по исследованию понятий экстремума функции, условий его существования, а также методов аналитического поиска экстремумов. Важно отметить, что понимание экстремумов является ключевым аспектом в математическом анализе и прикладных задачах, связанных с оптимизацией.

В рамках работы был представлен обзор системы компьютерной алгебры Maple, выделены ее основные преимущества и возможности.

Подробное описание различных методов, включая использование производных первого порядка, а также применение метода множителей Лагранжа, позволило получить обширное представление о доступных подходах для нахождения экстремумов. Включение дополнительных команд Maple, которые напрямую не связаны с экстремумами, но способствуют эффективному решению задач, продемонстрировало универсальность данной системы.

Практическая часть работы включала решение ряда задач, связанных с экстремумами, как аналитическим методом, так и с использованием Maple. Сравнение результатов показало, что Maple не только ускоряет процесс вычислений, но и позволяет избежать ошибок, которые могут возникнуть при ручных расчетах.

Анализ полученных результатов подтвердил высокую эффективность системы Maple в решении задач на экстремумы. Данная курсовая работа подтвердила, что использование СКА Maple значительно упрощает и оптимизирует процесс анализа функций, что делает ее незаменимым инструментом для студентов и специалистов в области математики и смежных дисциплин. В заключение, можно с уверенностью сказать, что система Maple является надежным помощником в исследовании математических задач.

# СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] Фоксфорд [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://foxford.ru/wiki/matematika/ekstremumy-funktsii?ysclid=m1l766i2o7385601761&utm_referrer=https%3A%2F%2Fyandex.by%2F>. – Дата доступа: 23.09.2024

[2] StudFiles [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://studfile.net/preview/9781014/page:2>. – Дата доступа: 23.09.2024.

[3] Maplesoft Documentation Center [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [Maplesoft Documentation Center - Product Manuals and Support Material](https://www.maplesoft.com/documentation_center/). – Дата доступа: 23.09.2024.

[4] Maple User Manual [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [Maple User Manual (uio.no)](https://www.mn.uio.no/astro/english/services/it/help/mathematics/maple/maple_user_manual.pdf). – Дата доступа: 23.09.2024.

[5] Maximize/Minimize – Maple Help [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.maplesoft.com/support/help/maple/view.aspx?path=minimize>. – Дата доступа: 25.10.2024

[6] Extrema – Maple Help [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://yandex.by/search/?text=maple+extrema&clid=2411726&rdrnd=135475&lr=157&redircnt=1730151677.1>. – Дата доступа: 25.10.2024

[7] Maplesoft Media Releases [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.maplesoft.com/company/news/releases/2024/2024-03-06-Powerful-AI-Technology-Advances-Maplesoft-Mission-to-Unleash-the-Power-of-Math.aspx>. – Дата доступа: 25.10.2024.

[8] Метод множителей Лагранжа : метод. пособие для студентов спец. 1-31 03 01-03 «Математика (экономическая деятельность)» / В. И. Бахтин, И. А. Иванишко, А. В. Лебедев, О. И. Пиндрик. — Минск : БГУ, 2012.– 40 с.

[9] Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Введение в анализ и дифференциальное исчисление функции одной переменной : пособие / В. В. Цегельник [и др.]. – Минск : БГУИР, 2017. – 198 с.

[10] Вагнер, О. А. Математика. Применение пакета Mathematic. В 2 ч. Ч.1 : Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Введение в математический анализ : пособие / О. А. Вагнер, Л. А. Фомичёва. – Минск: БГУИР, 2019. − 180 с.

[11] StudFiles [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://studfile.net/preview/7624006/page:15/>. – Дата доступа: 23.09.2024.

[12] Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа 1 Том : пособие. В 2 т. / Г.М. Фихтенгольц. – Москва : 1968. – 440 с.