Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования «Белорусский государственный университет   
информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра информатики

Дисциплина «Прикладные задачи математического анализа»

|  |  |
| --- | --- |
|  | «К защите допустить» |
|  | Руководитель курсового проекта доцент кафедры информатики  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_В.Я. Анисимов |
|  | \_\_\_.\_\_\_\_.2024 |

**ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА**

к курсовому проекту

на тему:

**«РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ЭКСТРЕМУМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СКА MAPLE»**

БГУИР КП 6-05 0612 02 015 ПЗ

|  |  |
| --- | --- |
|  | Выполнила студентка группы 353504  ЛЕБЕДЕВА Милана Валерьевна \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  (подпись студента) |
|  | Курсовой проект представлен на проверку \_\_\_.\_\_\_\_.2024  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  (подпись студента) |

Минск 2024

**СОДЕРЖАНИЕ**

[Введение 5](#_Toc121715378)

[1 Теоретическая часть 7](#_Toc121715379)

[1.1 Понятие экстремума функции 7](#_Toc121715380)

[1.2 Условия существования экстремумов 10](#_Toc121715381)

[1.3 Методы поиска экстремумов 11](#_Toc121715381)

[2 Система компьютерной алгебры Maple 14](#_Toc121715382)

[2.1 Обзор системы Maple 14](#_Toc121715383)

[2.2 Основные возможности Maple для решения задач на экстремум 15](#_Toc121715384)

[3 Методы решения задач на экстремумы в Maple 17](#_Toc121715390)

[3.1 Использование производных для нахождения экстремумов 17](#_Toc121715391)

[3.2 Применение команды extrema 17](#_Toc121715392)

[3.3 Применение команд optimize и minimize 19](#_Toc121715393)

[4 Практическая часть 20](#_Toc121715394)

[4.1 Примеры решения задач в Maple 20](#_Toc121715391)

[4.2 Анализ результатов 25](#_Toc121715391)

[Заключение 30](#_Toc121715401)

[Список использованных источников 31](#_Toc121715402)

# Комментарии

Введение: краткое описание проблемы, цель исследования и задачи для ее достижения, содержание глав пока что без результатов работы.

Глава 1

1.1 - определение локального и глобального экстремума, примеры функций с экстремумами.

1.2 - необходимое и достаточные условия, возможно с графическим представлением.

1.3(может быть исключен в будущем) - использование производных, возможно метод Лагранжа и другие аналитические методы.

Глава 2

2.1 - история создания Maple, применение в научных и образовательных целях.

2.2 - краткое описание возможностей Maple(какие есть команды).

Глава 3

3.1 - примеры кода для вычисления производных в MAPLE.

3.2 - подробное описание и туториал использования команды.

3.3 - подробное описание и туториал использования команд.

Глава 4

4.1 - несколько примеров с подробным решением и объяснением.

4.2 сравнение результатов с аналитическими значениями (если возможно), обсуждение точности и скорости вычислений.

Заключение - выводы по работе, основные результаты, значение полученных результатов для практики, перспективы использования MAPLE в прикладных задачах, возможности дальнейших исследований, рекомендации по использованию MAPLE для студентов и исследователей.

Список литературы - учебники, статьи и документация по MAPLE.

# ВВЕДЕНИЕ

**Краткое описание проблемы.**

В современных условиях научных исследований и инженерной практики задача нахождения экстремумов функций приобретает особую актуальность. Экстремумы играют ключевую роль в оптимизации процессов, моделировании и принятии решений в различных областях — от экономики до физики. Однако традиционные аналитические методы могут оказаться недостаточными для решения сложных задач. В таких случаях на помощь приходят компьютерные системы, такие как Maple, которые предоставляют мощные инструменты для автоматизации расчетов и визуализации результатов.

**Цель и перечни задач:**

Целью данной работы является исследование методов нахождения экстремумов функций с использованием системы компьютерной алгебры Maple. Для достижения этой цели необходимо решить следующие задачи:

1 Изучить теоретические основы экстремумов функций, включая понятия, условия существования и методы их поиска.

2 Провести обзор системы Maple, выделив ее основные возможности для решения задач на экстремум.

3 Рассмотреть методы, доступные в Maple для нахождения экстремумов, включая использование производных, команд extrema, optimize и minimize.

4 Сделать практическую часть, включающую примеры решения задач и анализ полученных результатов.

**Краткое содержание глав.**

В первой главе работы будет рассмотрено понятие экстремума функции, а также условия его существования и основные методы поиска. Вторая глава будет посвящена системе Maple: ее возможностям и особенностям, которые делают ее подходящей для решения задач на экстремум. Третья глава представит конкретные методы, доступные в Maple для нахождения экстремумов, с акцентом на практическое применение производных и специализированных команд. В четвертой главе будут приведены примеры решения конкретных задач в Maple, а также проведен анализ полученных результатов, что позволит оценить эффективность и точность используемых методов.

# 1 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

## 1.1 Понятие экстремума функции

Экстремумы функции играют важную роль в математическом анализе и его приложениях. Экстремумом функции называется её максимальное или минимальное значение на заданном множестве.

**Определение 1.** Точка называется точкой локального максимума функции , если найдется такой интервал с центром в этой точке, что для всех из этого интервала выполняется неравенство .

**Определение 2.** Точка называется точкой локального минимума функции , если найдется такой интервал с центром в этой точке, что для всех из этого интервала выполняется неравенство .

**Определение 3.** Точка называется точкой строгого локального максимума функции , если найдется такой интервал с центром в этой точке, что для всех из этого интервала выполняется неравенство .

**Определение 4.** Точка называется точкой строгого локального минимума функции , если найдется такой интервал с центром в этой точке, что для всех из этого интервала выполняется неравенство .

**Определение 5.** Точки локального минимума и локального максимума функции называются её точками экстремума, а значения функции в этих точках — экстремумами этой функции.

**Определение 6.** Наибольшее или наименьшее значение функции на промежутке называется глобальным экстремумом.

Замечание. Следует различать понятия точек экстремума и экстремумов функции. На графике функции точки экстремума — это значения на оси  а экстремумы функции — это значения на оси (см. рис. 1.1) [1].

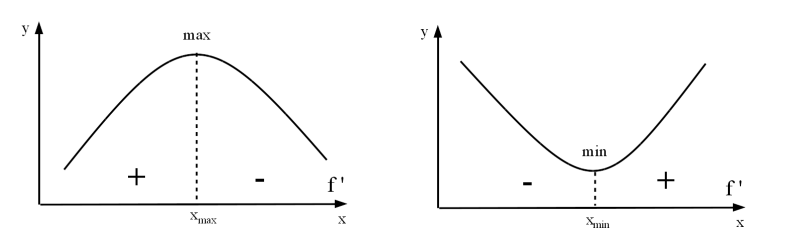


Рисунок 1.1 – Точки максимума и минимума

## 1.2 Условия существования экстремумов

Условия существования экстремумов функции необходимы для нахождения и классификации критических точек.

*Теорема (необходимое условие экстремума)*. Если точка является точкой экстремума функции , то в этой точке равен нулю или не существует.

Если , то в точке функция имеет гладкий экстремум (см. рис 1.2).

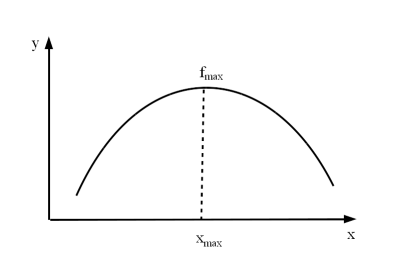


Рисунок 1.2 – Гладкий экстремум

Если не существует (т.е. ), то в точке функция имеет острый экстремум (см. рис 1.3).

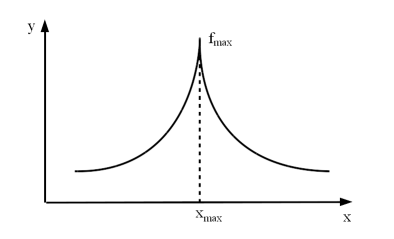


Рисунок 1.3 – Острый экстремум

*Теорема (достаточное условие экстремума по первой производной)*. Пусть функция дифференцируема в некоторой окрестности точки , кроме, быть может, самой точки , в которой она является непрерывной. Тогда если меняет знак при переходе через точку , то точка является точкой экстремума.

*Теорема (достаточное условие экстремума по второй производной)*. Пусть , , . Если , то – точка локального максимума. Если , то – точка локального минимума.

## 1.3 Методы поиска экстремумов

Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст.

# 2 СИСТЕМА КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ MAPLE

## 2.1 Обзор системы Maple

Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст.

## 2.2 Основные возможности Maple для решения задач на жкстремум

Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст.

# 3 МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ЭКСТРЕМУМЫ В MAPLE

## 3.1 Использование производных для нахождения экстремумов

Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст.

## 3.2 Применение команды extrema

Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст.

## 3.3 Применение команд optimize и minimize

Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст.

# 4 ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

## 4.1 Примеры решения задач в Maple

Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст.

## 4.2 Анализ результатов

Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст. Текст.

# СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] Фоксфорд [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://foxford.ru/wiki/matematika/ekstremumy-funktsii?ysclid=m1l766i2o7385601761&utm_referrer=https%3A%2F%2Fyandex.by%2F>. – Дата доступа: 23.09.2024

[2] Maplesoft Documentation Center [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [Maplesoft Documentation Center - Product Manuals and Support Material](https://www.maplesoft.com/documentation_center/). – Дата доступа: 23.09.2024.

[3] Maple User Manual [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [Maple User Manual (uio.no)](https://www.mn.uio.no/astro/english/services/it/help/mathematics/maple/maple_user_manual.pdf). – Дата доступа: 23.09.2024.

[4] Вагнер, О. А. Математика. Применение пакета Mathematic. В 2 ч. Ч.1 : Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Введение в математический анализ : пособие / О. А. Вагнер, Л. А. Фомичёва. – Минск: БГУИР, 2019. − 180 с.

[5] Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Введение в анализ и дифференциальное исчисление функции одной переменной : пособие / В. В. Цегельник [и др.]. – Минск : БГУИР, 2017. – 198 с.

[6] StudFiles [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://studfile.net/preview/9781014/page:2>. – Дата доступа: 23.09.2024.

[7] StudFiles [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://studfile.net/preview/7624006/page:15/>. – Дата доступа: 23.09.2024.

[8] Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа 1 Том : пособие. В 2 т. / Г.М. Фихтенгольц. – Москва : 1968. – 440 с.

[9]

[10]

[11]